Leçon 3 : Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle

Plan de la leçon :

I) Expérience aléatoire
 1) Définition
 2) Evenement
II) Probabilités
 1) Probabilité d'un événement
 2) Equiprobabilité
III) Probabilités conditionnelles
 1) Probabilités conditionnelles
 2) Formule de Bayes
 3) Evénements indépendances

Leçon :

I) Expérience aléatoire

1) Définition

En probabilité, on dit d'une expérience qu'elle est aléatoire lorsque tous les résultats possibles sont déterminés à l'avance, mais que seul le hasard réalise un résultat plutôt qu'un autre.

Dans la pratique, en dehors des jeux de hasard (dés, cartes), il est souvent difficile d'opérer dans les conditions du hasard. Ainsi lorsque l'expérience consiste à choisir un objet parmi d'autres, il faut s'assurer que les objets sont rigoureusement indiscernables pour chacun de nos cinq sens ou encore laisser faire le choix à un ordinateur qui dispose de table de hasard.

2) Evénement

- Lors d'une expérience aléatoire un résultat possible est appelé événement élémentaire. L'ensemble des résultats possibles est appelé univers, on le note Ω. Le nombre d'éléments de Ω est noté Card(Ω).
- Un événement est un sous ensemble de l'univers. Un événement A est réalisé lorsque le résultat de l'expérience est un événement élémentaire de A.
- L'ensemble de tous les événements liés à une expérience aléatoire est l'ensemble des parties de Ω. On le note P(Ω).
- Un événement est dit certain lorsqu'il est égal à Ω.
- Un événement est dit impossible lorsqu'il ne se réalise jamais. On le note $\emptyset$.
- L'événement contraire ou complémentaire de l'événement A est l'ensemble de tous les éléments de l'univers qui n'appartiennent pas à A. Il est noté $\overline{A}$.
- L'ensemble des événements réalisant A ou B est noté $A\cup B$.
- L'ensemble des événements réalisant A et B est noté $A\cap B$.
- Deux événements A et B sont incompatibles ou disjoints si et seulement si $A\cap B=\emptyset$.

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : On lance un dé à 6 faces

On a $\Omega=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Soit A l'événement « le 1 sort », A est un événement élémentaire

Soit B l'événement « le nombre obtenu est pair », on a B=$\{2; 4; 6\}$ et on a $\overline{B}=\{1; 3; 5\}$ qui est aussi l'événement « le nombre obtenu est impair ».

On a que l'événement $A\cap B=\emptyset$ donc les événements A et B sont incompatibles.

L'événement $A\cup B=\{1; 2; 4; 6\}$.

II) Probabilités

1) Probabilité d'un événement

Définition :

Une probabilité p est une application de P(Ω) dans [0; 1] telle que :

- p(Ω) = 1;
- $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$ pour tous les événements A et B incompatibles.

Propositions :

1) $\forall A\in P(\Omega)$, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
2) $p(\emptyset)=0$
3) $\forall A, B \in \Omega$, $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

Preuve :

1) $A\cap\overline{A}=\emptyset$ et $A\cup\overline{A} = \Omega$

   Donc $p(A) + p(\overline{A})= p(A\cup\overline{A}) = p(\Omega) = 1$
2) Il suffit de prendre A= Ω dans l'égalité ci-dessus
3) On écrit $A = (A\backslash B)\cup(A\cap B)$ et $B = (B\backslash A)\cup(A\cap B)$

   Donc $p(A) = p(A\backslash B) + p(A\cap B)$ et $p(B) = p(B\backslash A) + p(A\cap B)$

   $A\cup B=(A\backslash B)\cup(A\cap B)\cup(B\backslash A)$

   donc $p(A\cup B)=p(A\backslash B) + p(A\cap B) + p(B\backslash A)$

   donc $p(A\cup B)=p(A) +p(B) - p(A\cap B)$

2) Equiprobabilité

Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Si le nombre des événements élémentaires est n alors la probabilité de chacun est $\frac{1}{n}$.

Alors pour tout événements A,

$$p(A)=\frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega}=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple :

Dans un lot de 32 pièces, 8 ont subi le contrôle C1, 12 le contrôle C2 et 3 ont subi les deux contrôles.

On choisit au hasard une pièce, quelle est la probabilité pour qu'elle ait subi le contrôle C1 ou le contrôle C2?

Soit A l'événement « la pièce a subi le contrôle C1 » et soit B l'événement « la pièce a subit le contrôle C2 » :

$$p(A\cup B)=p(A) +p(B) - p(A\cap B)=\frac{8}{32}+\frac{12}{32}-\frac{3}{32}=\frac{17}{32}\approx 0{,}53$$

III) Probabilités conditionnelles et Indépendances.

1) Probabilités conditionnelles

Définition :

Soient A et B deux événements de Ω avec P(B)>0. La probabilité de A sachant B est : $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

Proposition :

Soit B un événement de Ω avec P(B)> 0 . L'application p(-/B) : $\Omega \rightarrow [0;1]$, définie par $A \rightarrow p(A/B)$, est une probabilité.

Preuve :

Montrons que p(Ω/B) = 1 :

$$p(\Omega/B) = \frac{p(\Omega\cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

Soient A et C deux événements incompatibles montrons que $p((A\cup C)/B)=p(A/B)+p(C/B)$

$$p(A\cup C/B)=\frac{P((A\cup C)\cap B)}{p(B)}$$

$$=\frac{p((A\cap B)\cup(C\cap B))}{p(B)}$$

$$=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}+\frac{p(C\cap B)}{p(B)}$$ (car $A\cap B$ et $C\cap B$ sont incompatibles car A et B sont incompatibles)

$$= p(A/B) + p(C/B)$$

Donc l'application p(-/B) : Ω → [0;1], définie par A → p(A/B), est une probabilité.

Proposition :

Soient $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ une famille finie d'événements tels que $\forall i\in\{1, ..., n\}\ p(A_1\cap...\cap A_i)\neq 0$.

Alors $p(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n)=p(A_1)*p_{A_1}(A_2)*p_{A_1\cap A_2}(A_3)*...*p_{A_1\cap...\cap A_{n-1}}(A_n)$

Preuve :

Pour n = 3 : $p(A_1)*p_{A_1}(A_2)*p_{A_1\cap A_2}(A_3)=p(A_1)*\frac{p(A_1\cap A_2)}{p(A_1)}*\frac{p(A_1\cap A_2\cap A_3)}{p(A_1\cap A_2)}$

$$=p(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

2) Formule de Bayes

Proposition : Formule des probabilités Totales

Supposons que $\{B_1, \dots, B_n\}$ soit une partition de Ω avec $p(B_i) > 0\ \ \forall i\in\{1, ..., n\}$. Alors, pour tout événement A on a : $p(A)=\sum_{i=1}^{n} p_{B_i}(A)*p(B_i)$

Preuve :

Puisque $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de Ω alors $\{B_1\cap E, \dots, B_n\cap E\}$ est une partition de $E\cap\Omega=E$ on a donc : $p(E)=p((B_1\cap E)\cup...\cup(B_n\cap E))$

$$=\sum_{i=1}^{n} p(B_i\cap E)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p(B_i)*p_{B_i}(E)$$

Théorème : formule de Bayes.

Supposons que $\{B_1, \dots, B_n\}$ soit une partition de Ω avec $p(B_i) > 0\ \ \forall i\in\{1, ..., n\}$. Alors, pour tout événement A on a : $p_A(B_j)=\frac{p_{B_j}(A)*p(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i)*p_{B_i}(A)}\ \forall j\in\{1, ...,n\}$

Preuve :

$$p_A(B_j)=\frac{p(B_j\cap A)}{p(A)}=\frac{p_{B_j}(A)*p(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i)*p_{B_i}(A)}\ \forall\ j\in\{1, ...,n\}$$ (d'après la formule d'indépendance et la formule des probabilités totales)

Exemple :

Un sac A contient 9 boules dont 5 rouges; un sac B contient 5 boules dont 3 rouges.

a) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit rouge?

b) Sachant que cette boule est rouge, quelle est la probabilité pour qu'elle viennent de A?

Soient A l'événement « la boule vient du sac A », B l'événement « la boule vient du sac B » et R l'événement « la boule est rouge ».

a) $p(R) = p_A(R) + p_B(R) = \frac{p(A\cap R)}{p(A)}+\frac{p(B\cap R)}{p(B)}=\frac{5}{9}*\frac{9}{14}+\frac{3}{5}*\frac{5}{14}=\frac{5}{14}+\frac{3}{14}=\frac{4}{7}$

b) $p_R(A)=\frac{p(R\cap A)}{P(R)}=\frac{5}{9}*\frac{7}{4}=\frac{35}{36}$

3) Evénements indépendants

Définition :

Deux événements A et B sont indépendants si $p(A\cap B)=p(A)*p(B)$

Proposition :

Si p(A)>0 alors :

A et B sont deux événements indépendants $\Leftrightarrow p_A(B)=p(B)\Leftrightarrow p_B(A)=p(A)$.

c'est à dire A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.

Preuve :

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)\Leftrightarrow\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)\Leftrightarrow p_A(B)=p(B)$$

Proposition :

On a équivalence entre :

1) A et B sont indépendants
2) A et $\overline{B}$ sont indépendants
3) $\overline{A}$ et B sont indépendants
4) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Preuve :

Montrons que 1) => 2) :

On veut montrer que $p(\overline{A}\cap B)=p(\overline{A}).p(B)$

Puisque $B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$ qui est une union disjointe

on a $p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)$

donc
$$\begin{aligned}p(\overline{A}\cap B)&=p(B)-p(A\cap B)\\&=p(B)-p(A)p(B)\\&=p(B)(1-p(A))\\&=p(B)p(\overline{A})\end{aligned}$$

On a de la même façon que 1) => 3), 2) => 1) et 3) => 1)

On a aussi facilement que 2) <=> 4) et 3) <=> 4) (car $p(A) = 1 - p(\overline{A})$)

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
A est l'événement « tirer un roi » et B est l'événement « tirer un cœur ».
$A \cap B$ est donc l'événement « tirer le roi de cœur ».
On vérifie que A et B sont indépendants : $p(A\cap B)=\frac{1}{32}$ et $p(A).p(B)=\frac{1}{8}*\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

C est l'événement « tirer un roi rouge »
$B \cap C$ est donc l'événement « tirer le roi de cœur ».
On vérifie que B et C ne sont pas indépendants : $p(B\cap C)=\frac{1}{32}$ et $p(B).p(C)=\frac{1}{4}*\frac{1}{16}=\frac{1}{64}$
donc $p(B\cap C)\neq p(B).p(C)$

Références :

Livre de B.T.S, Mathématiques industriel, Spécialités du groupement A, édition Nathan
Livre de B.T.S, Mathématiques industriel, Spécialités du groupement B et C, édition Nathan
Livre de B.T.S, Maths, B.T.S groupement A, édition ellipse