<u>Leçon 12 :</u> Multiples, Diviseurs, division euclidienne

<u>Niveau :</u> Terminale Scientifique Spécialité Maths (car dans $\mathbb{Z}$) si dans $\mathbb{N}$ alors niveau troisième.

I. <u>Multiples :</u>

<u>Définition :</u>

Un multiple d'un nombre est un produit dont un des facteurs est ce nombre.

Tout multiple d'un entier n peut sécrire sous la forme k * n (k étant un entier).

Réciproquement, tout nombre qui peut s'écrire sous la forme k * n (avec k et n entiers) est un multiple de n (et de k).

<u>Exemple :</u>

3 * 7 = 21 donc 21 est un multiple de 3 et 7 .

8 * 31 = 248 donc 248 est un multiple de 8 et 31.

<u>Remarque :</u>

Le produit de n'importe quel nombre par 0 est 0. Donc 0 est un multiple de tous les nombres.

<u>Théorème :</u>

La somme de deux multiples d'un même nombre a est un multiple de a.

La différence de deux multiples d'un même nombre a est un multiple de a.

<u>Preuve :</u>

Si b est un multiple de a, il peut s'écrire k * a.

Si c est un multiple de a, il peut s'écrire k' * a.

Alors b + c = k * a + k' * a = (k + k') * a qui est un multiple de a.

Et b - c = k * a - k' * a = (k - k') * a qui est aussi un multiple de a.

<u>Conséquence :</u>

Pour reconnaître des multiples d'un nombre, il est possible de soustraire successivement des multiples simples de ce nombre.

<u>Exemple :</u>

Pour savoir si 21743 est un multiple de 7, on peut soustraire successivement 21000 (=3000*7), 700 et 42 ; il reste 1 qui n'est pas un multiple de 7.

Théorème :

Tout multiple d'un entier a est multiple des diviseurs de a.

Ou bien, dit autrement : si a est un multiple de b et b multiple de c, alors a est multiple de c.

Preuve :

Si a est multiple de b, il peut s'écrire k * b.

Si b multiple de c, il peut s'écrire k' * c.

Alors a = k * (k' * c) = (k * k') *c ; ainsi a est un multiple de c.

Exemple :

12 est multiple de 6 et 6 est multiple de 3, donc 12 est multiple de 3.

400 est multiple de 100 et 100 est multiple de 25, alors 400 est multiple de 25.

II. Diviseurs :

Définition :

Soit a et b deux entiers.

On dit que b divise a s'il existe un entier k telque a = bk. On note : b|a.

On dit aussi que b est un diviseur de a.

A) Diviseurs de 1 ou -1:

Propriété :

Les seuls diviseurs de 1 ou de -1 dans $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1.

Démonstration :

-1 et 1 sont bien des diviseurs de 1 et de -1, car 1 = (-1)*(-1) = 1*1 et -1 = (-1) **1. S**i, pour tout a et b non nuls, on a a*b = 1 ou a*b = -1, alors, par passage aux valeurs absolues, on a $|a|*|b|=1$ avec $|a|\geq 1\, et |b|\geq 1$.

Avec $|b|\geq 1$, on peut déduire, grâce aux propriétés de l'ordre dans $\mathbb{N}$, que $|a|*|b|\geq|a|*1$.

Ainsi, on a 1 >= abs a ; donc a = 1 ou a = -1 (car a est un entier naturel non nul).

Le même raisonnement permet également d'obtenir b = 1 ou b = -1 ; d'où le résultat recherché.

B) divisibilité dans $\mathbb{Z}$:

propriétés :

1- Tout naturel non nul a un nombre fini de diviseurs.

2- Tout diviseur positif d d'un naturel non nul n vérifie : $1 \leq d \leq n$

Démonstrations :

Soit n un naturel non nul. L'entier d divise n s'il existe un entier k tel que n = kd. Si d > 0, alors k > 0 (car n est positif), et ainsi $k \geq 1$. D'où $n \geq d$. L'entier n a ainsi au plus n diviseurs dans $\mathbb{N}$. Il y a donc au plus 2n diviseurs de n dans $\mathbb{Z}$: ainsi, n admet un nombre fini de diviseurs.

Si on ne s'intéresse qu'aux diviseurs positifs de n, alors $1 \leq d \leq n$.

propriétés :

Soit a, b et c trois entiers non nuls. On a :

- 1|a
- a|a
- si a|b et b|c, alors a|c (la relation de divisibilité est transitive)
- a|b et b|a équivaut à a = b ou a = -b.
- si a|b et m un entier, alors a|mb.
- si c|a et c|b, alors, pour tous entiers α et β, c|(αa + βb).

Démonstrations :

- 1 divise a, car a = a*1.
- a divise a, car a = a*1.
- si b = ka et c = k'b où k et k' sont deux entiers, alors c = (k'k)a, où kk' est un entier
- si a|b et b|a, alors b = ka et a = k'b, où k et k' sont deux entiers; d'où : ab = (kk')ab et donc kk' = 1, car $ab \neq 0$. k et k' sont ainsi des diviseurs de 1 ; ils sont donc égaux à -1 ou 1, d'après la propriété précédente ; on en déduit alors que a = b ou a = -b.

  Réciproquement, si a = b ou a = -b, alors par définition, a|b et b|a.
- Si a divise b, alors il existe un entier k tel que b = ak. Alors, mb = mka = (mk)a, soit a divise mb, car mk est un entier.
- Si a = kc et b = k'c, où k et k' sont deux entiers, alors quelques soient les entiers α et β, on a : αa + βb = (αk + βk')c, où (αk + βk') est un entier, donc c/(αa + βb).

Exemples :

$3 \times 7 = 21$ donc 21 est divisible par 3 et par 7.

3 et 7 sont des diviseurs de 21.

$8 \times 31 = 248$ donc 248 est divisible par 8 et par 31.

8 et 31 sont deux diviseurs s de 248.

8 est un diviseur de 24 et 24 est diviseur de 120, donc 8 est un diviseur de 120.

C) Nombres premiers :

Définition :

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il admet exactement deux diviseurs entiers naturels distincts : 1 et p. L'ensemble des nombres premiers sera noté P.

Théorème :

(1) Tout entier naturel distinct de 1 possède au moins un diviseur premier.

(2) Tout naturel non premier n autre que 1 admet un diviseur premier a tel que $a \leq \sqrt{n}$

(3) L'ensemble P des nombres premiers est infini.

Démonstrations :

(1) Soit n un entier strictement supérieur à 1.

- si n est premier, il admet lui-même comme diviseur premier.
- Si n est composé, il admet d'autres diviseurs que 1 et n : soit p le nombre le plus petit d'entre eux. Alors, p est premier ; sinon, il serait composé et il admettrait un diviseur d tel que $1 < d < p$: mais d seriat alors un diviseur de n plus petit que p, ce qui est impossible. Donc, p est premier et n admet p comme diviseur premier.

(2) Soit n entier non premier strictement supérieur à 1 ; d'après la définition, n admet un diviseur d autre que 1 et n. Alors ; d * d' = n , avec $d' \in \mathbb{N}^*$.

d est supérieur ou égal à 2.
d' est supérieur ou égal à 2, car si d' était égal à 1, alors on aurait n = d.
Supposons $d \leq d'$. alors, $d^2 \leq dd'$, soit $d^2 \leq n$ ou encore $d \leq \sqrt{n}$.
D'après le résultat précédent, d admet au moins un diviseur premier a, qui est aussi un diviseur premier de n.
Comme l'on a $a \leq d$, on en déduit $a \leq \sqrt{n}$.

(3) Raisonnons par l'bsurde en supposant qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers. Soit p le plus grand d'entre eux et soit N le produit de tous ces nombres premiers ; 2 * 3 *5 * ... * p.

Soit à présent l'entier N' = N + 1: le reste de la division euclidienne de N' par 2, 3, 5, ... ou p est 1, donc N' n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 5, ..., p.

- Si N' est premier, il est supérieur à p, ce qui est absurde.
- Si N' n'est pas premier, il a au moins un diviseur premier qui est supérieur à p, ce qui est absurde.

III. Division euclidienne des entiers :

Théorème :

Soit a un entier et b un naturel non nul. Il existe un unique entier q et un unique entier r tels que a = bq + r, avec $0 \leq r < b$.

Démonstrations :

On considère les multiples de b : ..., -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, ... L'entier a est soit un multiple de b, soit compris strictement entre deux multiples de b, donc il existe un entier q unique tel que $qb \leq a < (q+1)b$.

On déduit de ces inégalités que $0 \leq a - qb < b$.

Si on note r = a- bq, on a bien a = bq + r avec $0 \leq r < b$: q est entier par définition, r aussi comme différence et produit d'entiers et ils sont bien déterminés de façon unique.

Définition :

On dit qu'on a effectué la division euclidienne de a par b : q est le quotient de la division et r le reste.

Propriétés :

1- b divise a si, et seulement si, le reste de la division de a par b est nul.

2- On peut étendre le théorème au cas où a est un entier et b entier non nul : il existe un unique entier q et un unique entier r tels que : a = bq + r, avec $0 \leq r \leq |b|$.

Exemples :

Le reste de la divison euclidienne de 557 par le naturel b est 89.

Déterminer les valeurs possibles de b et du quotient.

Solution :

on a 557 = bq +89, avec b > 89.

D'où bq = 468 = $2^2 * 3^2 * 13$. Ainsi, q peut valoir 1, 2, 3 ou 4.

Les valeurs correspondantes de b sont 468, 234, 156 et 117

IV. Critères de divisibilité :

Définition :

On appelle « critère de divisibilité » une méthode qui permet de reconnaître, sans effectuer le calcul du quotient, qu'un nombre est divisible par un autre. Ou bien, c'est équivalent, de reconnaître les multiples d'un nombre.

Propriétés :

1- Un entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.

2- Un entier est divisible par 2 s'il se termine par un chiffre pair.

3- Un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

4- Un entier est divisible par 3 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.

5-Un entier est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

6- Un entier n est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres de n est divisible par 4.

Démonstrations :

Soit $N=a_n*10^n+a_{n-1}*10^{n-1}...a_2*10^2+a_1*10+a_0$

1- $10\equiv 0(10)$, d'où $10^p\equiv 0(10)$, donc $N\equiv a_0(10)$.

Nest divisible par 10 si, et seulement si, a_0 est divisible par 10, c'est à dire si a_0 est nul.

2- $10\equiv 0(2)$, d'où $10^p\equiv 0(2)$, donc $N\equiv a_0(2)$.

Nest divisible par 2 si, et seulement si, a_0 est divisible par 2, c'est à dire si a_0 est égal à 0, 2, 4, 6 ou 8, car $0\leq a_0\leq 9$.

3- $10\equiv 0(5)$, d'où $10^p\equiv 0(5)$, donc $N\equiv a_0(5)$.

Nest divisible par 5 si, et seulement si, a_0 est divisible par 5, c'est à dire si a_0 est égal à 0 ou 5, car $0\leq a_0\leq 9$.

4- 10 ≡ 1 (3), d'où $10^p\equiv 1(3)$, et $N\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0(3)$.

Cela montre le résultat annoncé, car $a_n+a_{n-1}+...+a_2+a_1+a_0$ est bien la somme des chiffres de N.

5- Comme 10 ≡ 1 (9), le raisonnement précédemment fait avec 3 conduit au critère de divisibilité par 9.

6- Pour $p\geq 2$, on a $10^p\equiv 0(4)$. Ainsi, $N\equiv 10a_1+a_0(4)$.

Or, $10a_1+a_0$ n'est autre que le nombre composé des deux derniers chiffres de N, donc N est divisible par 4 si et seulement si $10a_1+a_0$ est divisible par 4.

Exemple :

27083127 est divisible par 3 car 2 + 7 + 0 + 8 + 3 + 1 + 2 + 7 = 30 entier divisible par 3. En revanche, il n'est pas divisible par 9, car 30 ne l'est pas.

Critère de divisibilité par 11 Méthode :

On calcule la somme des chiffres de rangs impairs, on calcule la somme des chiffres de rangs pairs, ensuite on calcule la différence entre ces deux sommes. Si cette différence est un multiple de 11, alors le nombre initial l'est aussi. Sinon le nompbre ne l'est pas non plus.

Cette méthode revient à calculer la « somme alternée » de l'ensemble des chiffres.

Exemples :

716 : 7 + 6 – 1 = 12 => 716 n'est pas un multiple de 11.

473 : 4 + 3 – 7 = 0. Multiple de 7 et 473 / 11 = 43.

Critère de divisibilité par 13 Méthode :

On barre le chiffre des unités et on ajoute son quadruple au nombre restant.

Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 13?

Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.

Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.

Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

Exemples :

Le calcul peut se faire de tête :

436 : 43 + 24 = 67. Pas multiple de 13.

312 : 31 + 8 = 39. Multiple de 13.

612 : 61 + 8 = 69. Pas multiple de 13.

975 : 97 + 20 = 117 = 9 13 . Multiple de 13.

Critère de divisibilité par 17 Méthode :

On barre le chiffre des unités et on retire son quintuple au nombre restant.

Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 17?

Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.

Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.

Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

Exemples :

Le calcul peut se faire de tête :

657 : 65 – 35 = 30. Pas multiple de 17

272 : 27 – 10 = 17. Multiple de 17

578 : 57 – 40 = 17. Multiple de 17

972 : 97 – 10 = 87. Pas multiple de 17 .

<u>Références :</u>

Indice Maths Spécialité Terminale S BORDAS.

DECLIC Terminale Scientifique Spécialité HACHETTE EDUCATION.