VRAI - FAUX.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Soit A et B deux matrices non nulles appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $AB = 0 \Longrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
2. $AB = BA$
3. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

@mathboost62
IG, TikTok, YouTube, Discord, Snapchat

https://mathboost.net/

1) FAUX

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

on a $AB = 0$. Mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

2) FAUX

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ le produit matriciel n'est pas commutatif.

3) FAUX

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$
$$= A^2 + AB + BA + B^2$$

($AB + BA = 2AB$ ssi $AB = BA$)

VRAI - FAUX.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Soit A, B et C trois matrices **non nulles** appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $AB = AC \Longrightarrow B = C$.
2. $AB = 0 \Longrightarrow A$ et B inversibles.
3. Si $ABC = 0$, alors au plus une des trois matrices est inversible.

@mathboost62
IG, TikTok, YouTube, Discord, Snapchat

https://mathboost.net/

1) FAUX

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$AB = AC$, mais $B \neq C$.

2) FAUX

$AB = 0$. Si A est inversible alors

$A^{-1} AB = A^{-1} 0 = 0$, donc $B = 0$

Absurde. A est non inversible

Si B est inversible alors $ABB^{-1} = 0$,

donc $A = 0$. Absurde.

B est non inversible.

3) VRAI

A, B et C telles que $ABC = 0$

Par l'absurde, on suppose au moins

deux matrices inversibles.

i) Supposons A, B et C inversibles, alors

$$(ABC)^{-1} ABC = (ABC)^{-1} \times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow C^{-1}B^{-1} \underbrace{A^{-1} A}_{I_n} BC = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{C^{-1} \underbrace{B^{-1} B}_{I_n} C}_{I_n} = 0 \Leftrightarrow I_n = 0$$

Absurde.

ii) Supposons A et B inversibles

$$ABC = 0 \Leftrightarrow (AB)^{-1} ABC = 0$$

$$\Leftrightarrow B^{-1}A^{-1} ABC = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 0 \quad \text{Absurde}$$

iii) Supposons A et C inversibles

$$ABC = 0 \Leftrightarrow A^{-1}ABCC^{-1} = A^{-1} 0 C^{-1}$$

$$\Leftrightarrow C = 0$$

Absurde

iv) Supposons B et C inversibles

$$ABC = 0 \Leftrightarrow ABC(BC)^{-1} = 0 \times (BC)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow ABCC^{-1}B^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 0$$

Absurde.

VRAI - FAUX.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Les matrices suivantes sont diagonalisables.

1. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

@mathboost62
IG, TikTok, YouTube, Discord, Snapchat

https://mathboost.net/

Prototype de matrices non diagonalisables

1) FAUX

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

A n'est pas diagonalisable.
En effet la seule valeur propre est a, et donc si elle diagonalisable, alors dans une certaine base on aurait $A = a I_2$.

Absurde.

$$\begin{cases} A = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} = a P I_2 P^{-1} = a P P^{-1} \\ \quad = a I_2 \end{cases}$$

2) FAUX.

on calcule le polynôme caractéristique

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$$

χ_B n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$.

3) FAUX

La seule vp est 0, donc si elle est diagonalisable elle serait égale à la matrice nulle.
Or $C \neq 0$.

VRAI - FAUX.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. Une combinaison linéaire de deux matrices symétriques est symétrique.

2. Produit de deux matrices symétriques est symétrique.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Alors il existe un unique couple (S, A) tel que $M = S + A$, avec S matrice symétrique et A matrice antisymétrique.

@mathboost62
IG, TikTok, YouTube, Discord, Snapchat

https://mathboost.net/

1) VRAI.

Soient A et B deux matrices symétriques, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB = \lambda A + \mu B$$

Ainsi $\lambda A + \mu B$ est symétrique.

2) FAUX.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A et B sont symétriques, mais

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas symetrique.

3) VRAI

Par Analyse - synthèse

* Analyse : On suppose qu'il existe une matrice symetrique S et une matrice antisymétrique A tq : $M = S + A$.

$${}^tM = {}^t(S+A) = {}^tS + {}^tA$$
$$= S - A$$

$$\begin{cases} M = S + A \\ {}^tM = S - A \end{cases}$$

Résolution par combinaison :

$$S = \frac{M + {}^tM}{2}, \text{ et } A = \frac{M - {}^tM}{2}$$

Synthèse : On montre que S est symétrique, A est antisymétrique et $S + A = M$.

- $S + A = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2} = M$.
- ${}^tS = \dfrac{{}^t(M + {}^tM)}{2} = \dfrac{{}^tM + M}{2} = S$
- ${}^tA = \dfrac{{}^t(M - {}^tM)}{2} = \dfrac{{}^tM - M}{2} = -\dfrac{M - {}^tM}{2}$

$$= -A$$

* unicité : Par construction dans la partie synthèse :

S et A sont uniquement données par M.

VRAI - FAUX.

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $M^p = 0$.

1. Une matrice nilpotente est inversible.
2. Une matrice nilpotente est diagonalisable.
3. Soit M une matrice nilpotente. Alors $I_n - M$ est inversible d'inverse $\sum\limits_{k=0}^{p-1} M^k$.

@mathboost62
IG, TikTok, YouTube, Discord, Snapchat

https://mathboost.net/

1) FAUX

Si M est inversible alors

$$M^p = 0 \Rightarrow M^{-1} M^p = 0$$
$$\Rightarrow M^{p-1} = 0$$

Absurde.

2) VRAI.

Si M est diagonalisable alors ....

$$M = P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow M^n = P D^n P^{-1} \quad \text{(Recurrence simple)}$$

$$\Rightarrow P D^n P^{-1} = 0$$
$$\Rightarrow D^p = 0 \Rightarrow D = 0$$

Donc M est semblable à la matrice nulle, donc elle et nulle
$(M = P 0 P^{-1} = 0)$

Absurde.

3) VRAI

$$(I_n - M)\sum_{k=0}^{p-1} M^k =$$

$$(I_n - M)(I_n + M + \dots + M^{p-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} M^k - \sum_{k=0}^{p-1} M^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} M^k - \sum_{k=1}^{p} M^k) \qquad (k \leftarrow k+1)$$

$$= I_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} M^k - \sum_{k=1}^{p-1} M^k}_{=0} + \underbrace{M^p}_{=0}$$

↳ M est nilpotente

Donc $I_n - M$ est inversible

d'inverse $(I_n - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} M^k$